

On va voir dans cette séance:

- (i) l'interprétation géométrique du déterminant
- (ii) la notion de base $\rightsquigarrow$ coordonnées } F.V

(15.10.2024)

§ 9.6. Déterminant et aire/volume

Thm 9.31 Pour $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$, alors

Aire du parallélogramme
défini par $\bar{v}$ et $\bar{w}$

$$= |\det(\bar{v}, \bar{w})| = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$$

preuve
dans
Exo
de
série 6

Thm 9.32 Pour $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{array}{l} \text{Volume du parallélépipède} \\ \text{défini par } \bar{u}, \bar{v} \text{ et } \bar{w} \end{array} = |\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$$

(Preuve) Omise $\square$

Suite du Chapitre 4

§ 4.5. Bases

Def. 4.28 Soit V un $\mathbb{F}V$. Une partie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ est dite base de V si elle est libre et engendre V . (ordonné)

Proposition (p. 56) Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base de V . Alors, pour tout $v \in V$ il existe des uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.

(Preuve) Dans les notes.

Exemple 4.32 $\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est base de $\mathbb{R}^n$.
base canonique $\uparrow$ $\bar{e}_1$ $\uparrow$ $\bar{e}_2$ $\uparrow$ $\bar{e}_n$

Exemple 4.33 $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

On veut montrer que $\mathcal{B}$ est libre et engendre V :

$\mathcal{B}$ libre $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\leadsto$ SEL homogène associé à $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: $\mathcal{B}$ libre $\Leftrightarrow (*)$ admet seulement la sol. triviale

$\leadsto$ on calcule la FJR : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}$ libre
de $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ engendre } V} \equiv \forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \text{le SFL } \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ est compatible } \forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$$\equiv \text{la FER admet un pivot par ligne. } \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Exemple 4.34 $V = \mathbb{P}_n$ et $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$. (exercice)

Thm. 4.46 Soit $T: V \rightarrow W$ une app. lin et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$.

(i) T inj. + $\mathcal{B}$ libre $\Rightarrow T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_p)\} \subseteq W$ libre

(ii) T surj. + $\mathcal{B}$ engendre $V \Rightarrow T(\mathcal{B})$ engendre W

En conséquence, si T bij. + $\mathcal{B}$ base de $V \Rightarrow T(\mathcal{B})$ base de W .

Réciproquement, si $T(\mathcal{B})$ est base de W et $\mathcal{B}$ est base de $V \Rightarrow T$ bijective.

exercice
essayer
de le
prouver

(Preuve) Dans les notes.

Déf. 4.29 Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V . On sait que, pour tout $v \in V$ il existe uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.

Le vecteur de coordonnées de v relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

α_i est la i -ème coordonnée / composante de v relative à $\mathcal{B}$.

Exemple 4.33 (suite) Soit $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. C'est quoi $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$?

(où $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$) On veut calculer

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 3 + 7 \cdot (-4)}{13} \\ \frac{-3 - 2 \cdot 4}{13} \end{pmatrix}$$

① Calculer la F.R. de $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{2} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 3 + 7 \cdot (-4)}{13} \\ \frac{-3 - 2 \cdot 4}{13} \end{pmatrix}$$

Example 4.32 (suite)

For $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}_{can}} = \underline{v} \quad \nabla \quad 0$$

$$\mathcal{B}_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{b} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$